

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Том 16

№ 6

Сборник научных трудов



ОТТИСК



НОВОСИБИРСК 1985

РАСЧЕТ ВЯЗКОГО НЕСЖИМАЕМОГО ТЕЧЕНИЯ
ЖИДКОСТИ МЕЖДУ СООСНЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ
ЦИЛИНДРАМИ С ПРОТОКОМ

В.Н.Бетлуцкий, Т.В.Гавриленко

Конечно-разностным методом решается задача о течении жидкости между двумя вращающимися цилиндрами. Разработан алгоритм расчета с использованием скалярной прогонки, когда давление непостоянно по ширине зазора. Для проверки алгоритма проведены расчеты для двух предельных задач: стационарное течение между двумя вращающимися цилиндрами без протока и течение Пуазейля в кольцевом зазоре. Рассчитано течение в общем случае для отношения радиусов цилиндров 0.9 и значений параметра $Re^2/\Omega\alpha = 0.025$ и 2,5. Приведены профили компонент скорости.

Работа посвящена задаче о течении в зазоре между двумя соосными цилиндрами. В начальном сечении жидкость втекает в зазор, а внутренний цилиндр может вращаться (рис. I). Подобная задача решалась в работе /1/ с использованием модели типа "узкого канала" /2/. Хотя уравнения "узкого канала" являются приближенными, их использование имеет смысл в силу относительной простоты и небольших расходов времени по сравнению с уравнениями Навье-Стокса. Эти уравнения могут быть получены из полных уравнений Навье-Стокса разложением всех функций по малому параметру $\varepsilon = \delta/\theta \sim Re^{-1}$ и сохранением членов порядка единицы (δ - ширина зазора, θ - характерный размер вдоль оси, Re - число Рейнольдса). Таким

образом, погрешность уравнений и полученных решений будет порядка ε . В случае отсутствия вращения модель дает постоянное значение давления поперек канала. В работе /3/ для этого случая предложен вариант метода прогонки, поскольку классическую прогонку применить не удается из-за интегрального уравнения расхода. В случае вращения жидкости появляется поперечный градиент давления, что уже не позволяет использовать прогонку работы /3/.

В настоящей работе разработан алгоритм расчета, который использует подход, аналогичный /3/, и позволяет применять скалярную прогонку, когда имеет место градиент давления в поперечном направлении. С помощью указанного алгоритма выполнены расчеты, результаты которых сравнены с работой /1/ и проанализированы.

I. Рассмотрим стационарное вязкое несжимаемое течение в зазоре между двумя соосными цилиндрами радиуса r_1 и r_2 , соответственно ($r_1 < r_2$). На входе в зазор параллельно оси цилиндров втекает жидкость с постоянной скоростью U_0 и давлением P_0 . Внутренний цилиндр может вращаться с угловой скоростью Ω . Течение в зазоре предполагается осесимметричным.

Для данной задачи уравнения Навье-Стокса запишем в цилиндрической системе координат r, z , где z совпадает с осью цилиндров. Введем безразмерные параметры

$$\begin{aligned} U &= \frac{v_z}{U}, & v &= \frac{v_r \cdot Re}{U(1-R)}, & w &= \frac{v_\phi}{\Omega r_1}, \\ \xi &= \frac{z(1-R)}{Re}, & \eta &= \frac{r}{r_2}, & p &= \frac{\rho - \rho_0}{\rho U^2} \end{aligned} \quad (I)$$

где v_z, v_r, v_ϕ - компоненты скорости в осевом, радиальном и окружном направлениях, U - некоторая характерная величина скорости. Здесь также введено число Рейнольдса $Re = U(r_2 - r_1)/v$ и отношение радиусов цилиндров $R = r_1/r_2$.

Если отношение толщины зазора $\delta = r_2 - r_1$ к длине цилиндров порядка величины Re^{-1} и много меньше единицы, то уравнения Навье-Стокса можно упростить, воспользовавшись предположениями Прандтля о равенстве порядков сил вязкости и инерции. Для нашей задачи упрощенные уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{w^2}{\gamma} &= \frac{2Re^2(1-R)}{Ta(1+R)} \frac{\partial P}{\partial \eta}, \\ u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ u \frac{\partial w}{\partial \xi} + v \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{v \cdot w}{\gamma} + \frac{w}{\gamma^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial w}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь дополнительно введено безразмерное число Тейлора

$$Ta = \frac{2\Omega^2 r_2^2 (r_2 - r_1)^3}{\gamma^2 (r_2 + r_1)}.$$

Нетрудно видеть, что система уравнений (2) параболического типа. Для нее необходимо поставить следующие начальные и граничные условия в области ($\xi > 0, R < \eta < 1$):

$$\begin{aligned} \xi = 0, \quad u &= 1, \quad P = 0, \\ \eta = R, \quad u &= v = 0, \quad w = 1, \\ \eta = 1, \quad u &= v = w = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Число Рейнольдса не содержится в задаче (2), (3), поскольку его удалось ввести в исходные функции и независимые переменные. Это означает, что полученные в работе результаты могут быть использованы для любого достаточно большого числа Рейнольдса, при котором течение остается ламинарным.

В работе /4/ показана разрешимость подобной задачи для сжимаемой жидкости без вращения. Отличительной особенностью этой задачи от классического пограничного слоя является то, что рас-

пределение давления не задается, а определяется из решения всей задачи (2), (3).

Для удобства решения задачи вместо условия $v = 0$ при $\eta = 1$ воспользуемся условием постоянства расхода

$$\int_R^1 u \eta d\eta = \frac{1}{2} (1 - R^2). \quad (4)$$

Это уравнение нетрудно получить путем интегрирования уравнения неразрывности с использованием обоих граничных условий для v и начального условия для u .

Подобный подход к решению задачи о течении в трубе был предложен в работе /5/, где описан ряд приближенных решений.

2. Для решения системы уравнений (2) в работе использовалась неявная шеститочечная разностная схема с весами. Порядок аппроксимации $O((1-2\alpha)\Delta\xi + \Delta\xi^2 + \Delta\eta^2)$, где α - весовой множитель. Условие устойчивости схемы для уравнения с постоянными коэффициентами $0,5 \leq \alpha \leq 1$. Коэффициенты в разностных уравнениях вычислялись по значениям параметров на предыдущем слое и предыдущей итерации.

Остановимся подробнее на решении второго уравнения системы (2). Запишем его в разностном виде.

$$A_i u_{i-1}^{n+1} - B_i u_i^{n+1} + C_i u_{i+1}^{n+1} = \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_i^{n+1/2} \Delta\eta^2 + D_i, \quad (5)$$

где индекс n означает номер слоя, а i - номер точки на слое. Коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i известны. Продифференцируем первое уравнение системы (2) по ξ и запишем его в конечных разностях в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_i^{n+1/2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{i-1}^{n+1/2} + E_i, \quad (6)$$

где введены обозначения

$$E_i = \frac{\Delta\eta}{2k(2R+(2i-1)\Delta\eta)\Delta\xi} [(w_i^{n+1} + w_{i-1}^{n+1})^2 - (w_i^n + w_{i-1}^n)^2],$$

$$\lambda = \frac{2Re^2(1-R)}{\tau a(1+R)}.$$

Здесь значения E_j вычисляются по профилям ω на предыдущем слое и по профилям ω , насчитанным на новом слое. Из равенства (6) видно, что $(\frac{\partial P}{\partial \xi})_i^{n+1/2}$ при всех значениях i могут быть выражены через $(\frac{\partial P}{\partial \xi})_0^{n+1/2}$.

$$(\frac{\partial P}{\partial \xi})_i^{n+1/2} = (\frac{\partial P}{\partial \xi})_0^{n+1/2} + \sum_{j=1}^i E_j. \quad (7)$$

Подставим полученное равенство в (5)

$$A_i u_{i-1}^{n+1} - B_i u_i^{n+1} + C_i u_{i+1}^{n+1} = (\frac{\partial P}{\partial \xi})_0^{n+1/2} \Delta \eta^2 + G_i, \quad (8)$$

где $G_i = D_i + \Delta \eta^2 \sum_{j=1}^i E_j$. Если решение уравнения (8) искать в виде

$$u_i^{n+1} = z_i^{n+1} + (\frac{\partial P}{\partial \xi})_0^{n+1/2} q_i^{n+1}, \quad (9)$$

то для z_i^{n+1} и q_i^{n+1} получим уравнения с левыми частями как в уравнении (8) и с правыми частями G_i и $\Delta \eta^2$ соответственно. Каждое из них решается скалярной прогонкой с нулевыми краевыми условиями.

Представим теперь уравнение постоянства расхода (4) в разностном виде

$$\Delta \eta \sum_{i=0}^I u_i^{n+1} (R + i \Delta \eta) = \frac{1}{2} (1 - R^2). \quad (10)$$

Подставим в него равенство (9) и выразим $(\frac{\partial P}{\partial \xi})_0^{n+1/2}$, тогда получим

$$(\frac{\partial P}{\partial \xi})_0^{n+1/2} = \frac{1/2(1-R^2) - \Delta \eta \sum_{i=0}^I z_i^{n+1} (R + i \Delta \eta)}{\Delta \eta \sum_{i=0}^I q_i^{n+1} (R + i \Delta \eta)}. \quad (II)$$

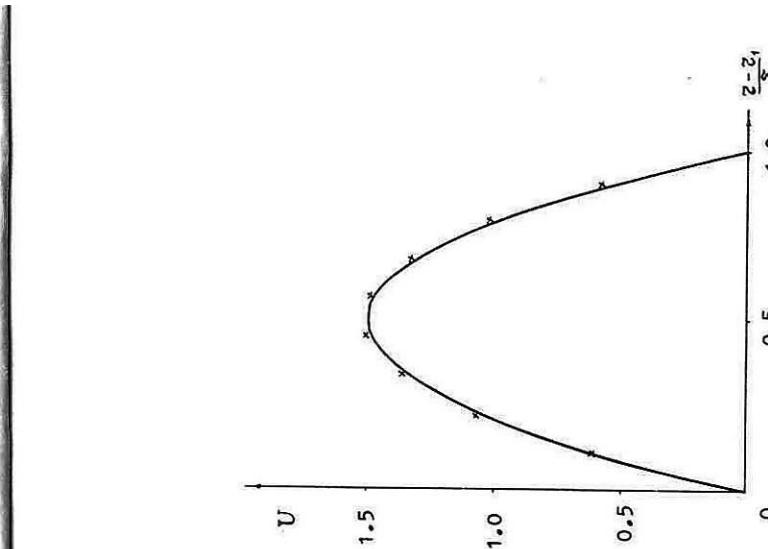


Рис.3

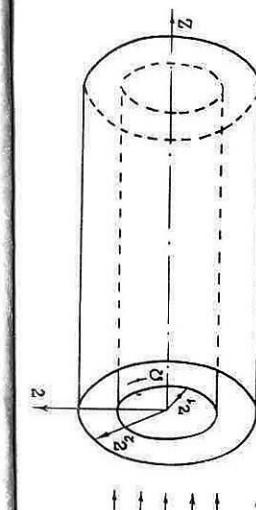


Рис.1

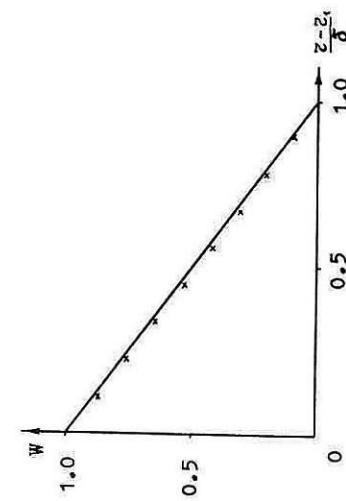


Рис.2

По найденным значениям z_i^{n+1} и q_i^{n+1} из равенства (II) найдем $\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_i^{n+1/2}$ и из (9) получим профиль скорости u_i^{n+1} .

Последовательность решения разностных уравнений на каждой итерации была следующей. Из третьего уравнения системы (2), записанного в разностном виде, скалярной прогонкой вычислялись значения w_i^{n+1} . Далее с помощью (7)-(II) определялись $\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_i^{n+1/2}$ и u_i^{n+1} , наконец, из разностного уравнения неразрывности находились значения v_i^{n+1} . Итерационный процесс на каждом слое продолжался до сходимости с заданной точностью.

3. На основе описанного алгоритма была составлена программа на ФОРТРАНе для ЭВМ БЭСМ-6. Были просчитаны два тестовых варианта: стационарное течение между двумя вращающимися бесконечными цилиндрами без протока и течение Пуазейля в кольцевом зазоре без вращения цилиндра. Для первой задачи имеет место аналитическое решение /6/, которое в наших обозначениях записывается в виде

$$u=0, \quad v=0, \quad w=\frac{R}{R^2-1}(1-\beta^2)/2.$$

На рис. 2 сплошной линией представлена зависимость w от β , соответствующая этой формуле. Здесь же крестиками приведены результаты расчета для 10 точек поперек зазора. Различие не превышает 2%.

Для течения Пуазейля также существует аналитическое решение /6/

$$u=\frac{1}{4} \frac{dP}{d\xi} \left(\beta^2 + \frac{1-R^2}{\ln R} \ln \beta - 1 \right), \quad v=0, \quad w=0.$$

Подставив выражение для u в уравнение постоянства расхода (4), получим выражение для градиента давления

$$\frac{dP}{d\xi} = -\frac{8 \ln R}{(1+R^2) \ln R + 1 - R^2}.$$

На рис. 3 сплошной линией приведена аналитическая зависимость u от β . Крестиками здесь также представлены результаты настоящих расчетов на расстоянии $\xi = 10$ для 10 точек поперек зазора. Как видно из графика, различие не превышает 2%.

Проведено сравнение результатов расчетов настоящей работы

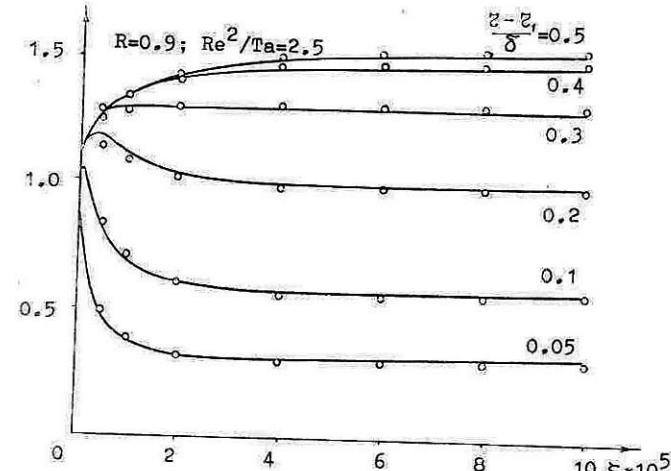


Рис.4

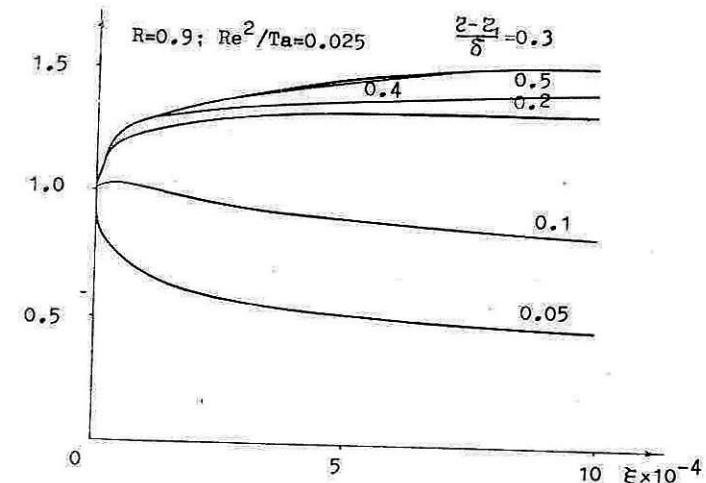


Рис.5

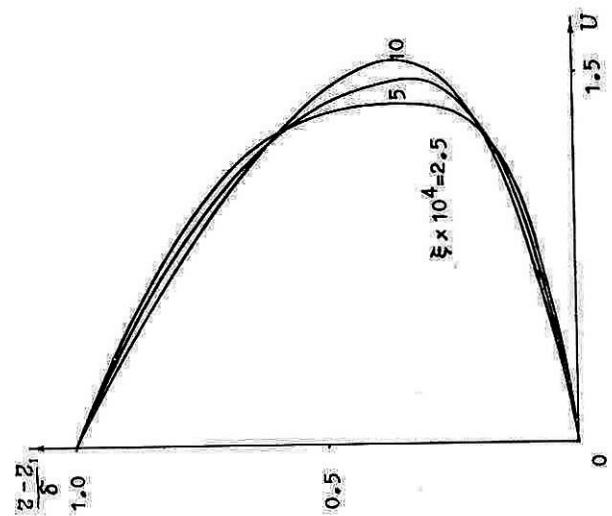


Рис.6

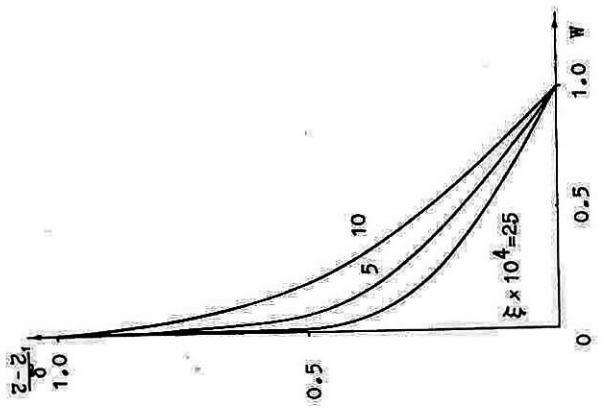


Рис.7

с расчетами работы /1/. На рис. 4 сплошными линиями представлена распределение компоненты скорости U вдоль оси в настоящей работе, кружочками - данные /1/ при $R = 0.9$ и $Re^2/Ta = 2.5$. Расчеты выполнены для 20 шагов в поперечном направлении и с шагом 10^{-5} вдоль оси. Сравнение показало, что максимальное отклонение данных работы /1/ составляет 5 %.

На рис. 5-7 приведено распределение продольной и окружной компонент скорости в ряде сечений при $R = 0.9$ и $Re^2/Ta = 0.025$. В этом варианте скорость вращения цилиндра значительно выше, чем в предыдущем. Как видно из графика, значение U на средней линии зазора не является максимальным в отличие от предыдущего варианта. А ее максимальное значение имеет место на расстоянии 0.3-0.4 толщины зазора от вращающегося цилиндра. Профиль окружной компоненты скорости носит монотонно-убывающий характер, приближаясь к линейной функции по мере удаления от входа.

1. Coney J.E.K., El-Shaaravi M.A.J. A contribution to the numerical solution of developing laminar flow in the entrance region of concentric annuli with rotating inner walls. - J. of Fluids Eng. Trans. of the ASME, ser.I, vol.96, p.333-339 (1974).
2. Вильямс Ш. Течение вязкого сжимаемого и несжимаемого газа в узких каналах. - Ракетная техника и космонавтика, 1963, № 1, с. 215-224.
3. Симуни Л.М. Движение вязкой несжимаемой жидкости в плоской трубе. - Еурн. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т.5, № 6, с. 1138-1141.
4. Ветлуцкий В.Н., Севастьяненко В.Г. Исследование теплообмена с учетом излучения при течении газа в трубе. - Мурн. прикл. матем. и техн. физ., № 5, с. 82-88.
5. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. - М.: Изд-во техн.-теорет. литер., 1951. - 420 с.

6. Кочин Н.Е., Кibel' П.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I. - М., 1963, - 728 с.

Институт теоретической
и прикладной механики
СО АН СССР
Новосибирск

Поступила в редакцию
5 июля 1984 г.
После переработки
6 мая 1985 г.