©Т.В. Гавриленко, сайт http://road-project.okis.ru

Вестник КемГУ. – 2012. - № 4(52). –Т. 2. – С. 37-42.

УДК 519.21:502.3

ОЦЕНКА ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

Т.В. Гавриленко, О.В. Адмаев

ESTIMATION OF ECOLOGICAL SAFETY OF ATMOSPHERIC AIR ON BASIS OF KOLMOGOROV EQUATIONS DECISION

T. Gavrilenko, O. Admaev

Рассматривается математическая модель прогноза состояний атмосферного воздуха. Система разбивается на пять дискретных состояний, характеризующихся интегральным показателем загрязнения. Система моделируется ориентированным графом, вершины которого соответствуют состояниям воздушной среды, а стрелки – возможностям перехода из одного состояния в другое. Граф описывается системой из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова, решение которой находится численно методом Рунге-Кутта четвертого порядка при заданных начальных условиях. Расчеты показали, что система достаточно быстро выходит на стационарный режим независимо от вида начальных условий для вероятностей состояний воздушной среды.

Ключевые слова: Марковский процесс, уравнения Колмогорова, состояние атмосферного воздуха

The mathematical model of prognosis of the states of atmospheric air is examined. The system is broken up on five discrete states, characterized by the integral index of contamination. The system is designed by the oriented graph, the tops of that correspond to the states of air environment, and pointer - transition possibilities from one state in other. A count is described by the system from five usual differential equations of Kolmogorov, a decision of that is numeral the method of Runge-Kutt of fourth order at the set initial condition. Calculations showed that the system quickly enough went out on the stationary mode regardless of type of initial conditions for probabilities of the states of air environment.

Keywords: Markov process, Kolmogorov equations, state of atmospheric air

Оценка состояния воздушной среды больших городов представляет собой актуальную задачу. Методики прогноза базируются на различных математических моделях, использующих как аппарат дифференциальных уравнений, так и вероятностно-статистические методы. В данной работе для прогноза состояний воздушной среды города рассматривается математическая модель, основанная на однородных марковских случайных процессах.

Пусть атмосферный воздух в исследуемом районе города представляет собой систему $S(t)$, принимающую в момент времени t какое-либо из n возможных состояний $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Случайный процесс, протекающий в системе $S(t)$ с дискретными состояниями $s_1, s_2, \ldots, s_n$, будем считать Марковским. Это означает, что для любого момента времени t_0 вероятность каждого из состояний системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от её состояния в настоящем ($t=t_0$) и не зависит от её поведения в прошлом ($t<t_0$) [1].

В настоящее время для оценки загрязнения атмосферного воздуха используется интегральный показатель – индекс загрязнения атмосферы, рассчитываемый по пяти наиболее значимым ингредиентам:

$$ИЗА_5 = \sum_{i=1}^{5} q_i,$$

где

$$q_i = \frac{Q_i}{Q_{ПДК,i}},$$

Q_i – концентрация i-го вещества в конкретный срок наблюдений, $Q_{ПДК,i}$ – его предельно допустимая концентрация. Например, для г. Красноярска наиболее значимыми ингредиентами считаются бенз/а/пирен, взвешенные вещества, формальдегид, диоксид азота и оксид азота. Их предельно допустимые концентрации и класс опасности приведены в табл.1 [2,3].

Таблица 1

Характеристики веществ, учитываемых в индексе загрязнения атмосферы

Вещество	ПДК максимально разовая мг/м^3	ПДК среднесуточная мг/м^3	Класс опасности
Бенз/а/пирен	-	$0{,}1\cdot10^{-5}$	1
Формальдегид	0,035	0,003	2
Взвешенные вещества	0,5	0,15	3
Диоксид азота	0,2	0,04	2
Оксид азота	0,4	0,06	3

Кроме показателя ИЗА$_5$ загрязнение атмосферного воздуха можно оценивать по зависимости

$$C = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} q_i \,. \qquad (1)$$

Показатель (1) является более удобным, т.к. он представляет не сумму средних значений концентраций веществ, как ИЗА$_5$, а среднюю концентрацию всех наиболее значимых веществ. Это позволяет оценить во сколько раз среднее значение этих веществ превышает их ПДК [4].

В зависимости от значения показателя ИЗА$_5$ (или C) выделяют пять состояний атмосферного воздуха, соответствующих различным степеням его загрязнения [4]. Характеристики состояний приведены в табл. 2

Таблица 2

Классификация состояний воздушной среды

Состояние	Обозначение	Загрязнение воздушной среды	Показатель ИЗА$_5$	Показатель C
1	s_1	Малое	Менее 5,0	Менее 1,0
2	s_2	Умеренное	От 5,0 до 7,0	От 1,0 до 1,4
3	s_3	Высокое	От 7,0 до 14,0	От 1,4 до 2,8
4	s_4	Очень высокое	От 14,0 до 21,0	От 2,8 до 4,2
5	s_5	Экстремально высокое	Более 21,0	Более 4,2

Таким образом, систему $S(t)$ можно представить в виде ориентированного графа, вершины которого соответствуют состояниям воздушной среды (n=5), а стрелки – возможностям перехода из одного состояния в другое (рис. 1).

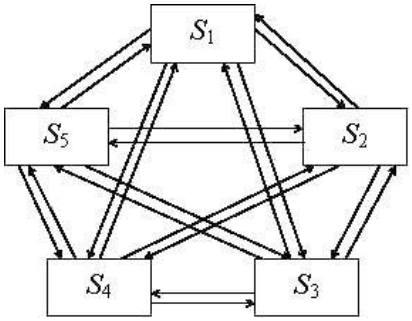


Рис. 1. **Граф, описывающий состояние атмосферного воздуха**

Обозначим вероятность i-го состояния в момент t (вероятность события, состоящего в том, что в момент t система $S(t)$ будет находиться в состоянии s_i) как $p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}$. Очевидно, что для системы с дискретными состояниями в любой момент времени t сумма вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i(t) = 1,$$

так как в любой момент времени t события $\{S(t) = s_1\}, \{S(t) = s_2\}, \ldots, \{S(t) = s_5\}$ образуют полную группу несовместных событий.

Предполагаем, что переходы из состояния в состояние происходят под воздействием стационарных пуассоновских потоков событий. Вероятность перехода системы $\boldsymbol{S}(t)$ из состояния s_i=$S(t)$, в состояние s_j=$S(t+\Delta t)$ за элементарный промежуток времени Δt,

$$p_{ij}(t) \approx \lambda_{ij}\Delta t \,,$$

где λ_{ij} – интенсивность пуассоновского потока событий, переводящего систему из s_i в s_j. Тогда граф описывается системой из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова [1]:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{5} p_j(t)\lambda_{ji} - p_i(t)\sum_{j=1}^{5}\lambda_{ij}\,, \quad i=1,\ldots 5. \qquad (2)$$

Первая сумма в правой части уравнений системы (2) распространяется на значения j, для которых возможен непосредственный переход из состояния s_j в s_i (т.е. $\lambda_{ji} \neq 0$), а вторая – на значения j, для которых возможен непосредственный переход из s_i в s_j (т.е. $\lambda_{ij} \neq 0$).

Система (2) решается при начальных условиях

$$p_1(0) = p_1^0;\; p_2(0) = p_2^0;\; p_3(0) = p_3^0;\; p_4(0) = p_4^0;\; p_5(0) = p_5^0 \,. \qquad (3)$$

Оценка интенсивностей λ_{ij} производится по агрегированной информации в виде относительных частот состояний системы $S(t)$ в каждый из моментов времени t. В этом случае выборочные наблюдения за состоянием атмосферы удовлетворяют стохастическому уравнению

$$\mathbf{y_j}(t+\Delta t)=\sum_{i=1}^{5}\mathbf{y_i}(t)\lambda_{ij}+\mathbf{u_j}(t+\Delta t)\ , \tag{4}$$

где $\mathbf{y_i}(t)$ – вектор наблюдавшихся частот появления состояния s_i (в момент времени t); $\mathbf{y_j}(t+\Delta t)$ – вектор наблюдавшихся частот появления состояния s_j (в момент времени $t+\Delta t$); $\mathbf{u_j}(t+\Delta t)$ – вектор случайных ошибок [5].

При $\Delta t=1$ уравнение (4) перепишется в виде

$$\mathbf{y_j}(t+1)=\sum_{i=1}^{5}\mathbf{y_i}(t)\lambda_{ij}+\mathbf{u_j}(t+1). \tag{5}$$

Интенсивности λ_{ij} определяются методом наименьших квадратов с ограничениями, так как обычные оценки по методу наименьших квадратов могут не удовлетворять условиям

$$0\le\lambda_{ij}\le 1,\quad i,j=1,\ldots 5.$$

В данном методе требуется найти минимум квадратичной формы

$$F=\sum_{j=1}^{5}\mathbf{u_j}'\mathbf{u_j}=\sum_{j=1}^{5}(\mathbf{y_j}-X_j\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{j})'\cdot(\mathbf{y_j}-X_j\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{j}), \tag{6}$$

где

$$\mathbf{y_j}=\{y_j(1),y_j(2),\ldots,y_j(T)\},\quad \mathbf{u_j}=\{u_j(1),u_j(2),\ldots,u_j(T)\},\quad \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{j}=\{\lambda_{1j},\lambda_{2j},\ldots,\lambda_{5j}\},$$

$$X_j=\begin{Vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \ldots & y_5(0)\\ y_1(1) & y_2(1) & \ldots & y_5(1)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1(T-1) & y_2(T-1) & \ldots & y_5(T-1)\end{Vmatrix},$$

T– длина выборки.

Среднеквадратическая ошибка аппроксимации интенсивностей λ_{ij} определяется по формуле

$$\varepsilon_j=\sqrt{\sum_{t=1}^{T}u_j^2(t)/T}\ ,$$

где $u_j(t)$ - компоненты вектора случайных ошибок, определяемые из уравнения (5), j=1,…,5. В более подробном виде алгоритм нахождения минимума формы (6) изложен в [6].

Применение изложенной методики проиллюстрируем на примере, в котором моделирование случайного процесса проводится с помощью пары независимых стандартных нормальных (т.е. гауссовских с нулевым средним и единичной дисперсией) случайных величин x_1 и x_2, определяемых по формулам

$$x_1=(-2\ln\alpha_1)^{-1/2}\cos(2\pi\alpha_2),$$
$$x_2=(-2\ln\alpha_1)^{-1/2}\sin(2\pi\alpha_2),$$

где α_1 и α_2 – случайные равномерно распределенные величины из интервала от 0 до 1, генерируемые датчиком псевдослучайных чисел [7].

Каждая выборка представляет собой модель изменения средненедельного показателя C, в течение календарного года. Средние значения примем по среднегодовым показателям ИЗА$_5$, пересчитанным по формуле (1). Среднегодовые значения ИЗА$_5$, в г. Красноярске, наблюдавшиеся в период с 1997г. по 2010г., приведены на рис. 2 [2]. Коэффициент вариации принимается равным 0,32.

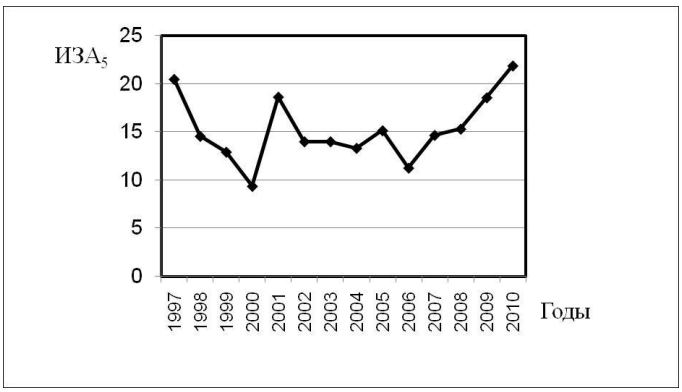


Рис. 2. **Изменение индекса загрязнения атмосферного воздуха (ИЗА$_5$) в г. Красноярске**

В итоге было построено 14 реализаций случайного процесса изменений показателя *C*, один из которых (для данных 2010 года) приведен на рис. 3.

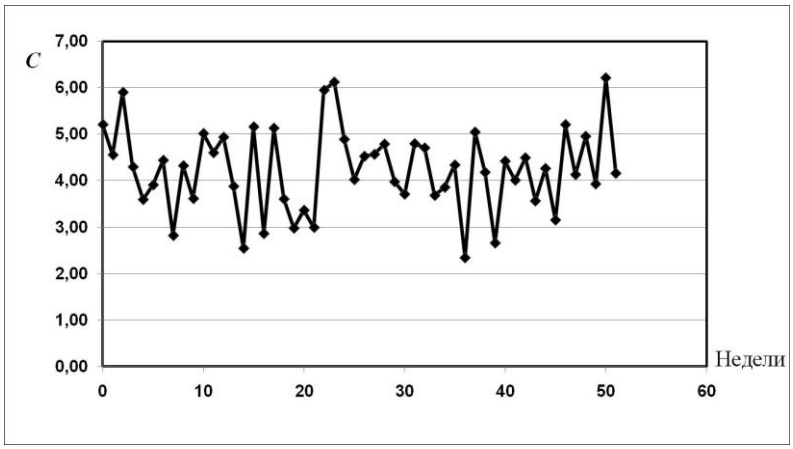


Рис. 3. **Модель реализации случайного процесса изменения показателя С**

В результате расчетов была получена матрица интенсивностей вероятностей перехода

$$\left\|\lambda_{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 0{,}487 & 0{,}169 & 0{,}344 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}394 & 0{,}425 & 0{,}181 \\ 0{,}023 & 0{,}043 & 0{,}361 & 0{,}429 & 0{,}144 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}723 & 0{,}277 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

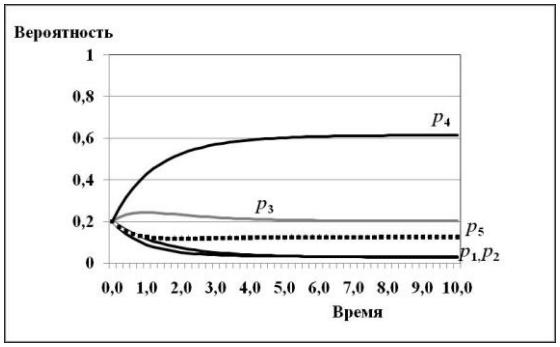
Подставляя значения элементов матрицы (7) в уравнение (2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = 0{,}023p_4 - p_1(0{,}169 + 0{,}344), \\ \dfrac{dp_2}{dt} = 0{,}169p_1 + 0{,}043p_4 - p_2, \\ \dfrac{dp_3}{dt} = 0{,}344p_1 + 0{,}361p_4 + 0{,}723p_5 - p_3(0{,}425 + 0{,}181), \\ \dfrac{dp_4}{dt} = p_2 + 0{,}425p_3 + 0{,}277p_5 - p_4(0{,}023 + 0{,}043 + 0{,}361 + 0{,}144), \\ \dfrac{dp_5}{dt} = 0{,}181p_3 + 0{,}144p_4 - p_5(0{,}723 + 0{,}277). \end{cases}$$

После преобразований данная система примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -0{,}513p_1 + 0{,}023p_4, \\ \dfrac{dp_2}{dt} = 0{,}169p_1 - p_2 + 0{,}043p_4, \\ \dfrac{dp_3}{dt} = 0{,}344p_1 - 0{,}606p_3 + 0{,}361p_4 + 0{,}723p_5 \\ \dfrac{dp_4}{dt} = p_2 + 0{,}425p_3 - 0{,}571p_4 + 0{,}277p_5, \\ \dfrac{dp_5}{dt} = 0{,}181p_3 + 0{,}144p_4 - p_5. \end{cases}$$

Её решение находится численно методом Рунге-Кутта четвертого порядка при начальных условиях (3). Расчеты показали, что система выходит на стационарный режим. При этом время его достижения сильно зависит от выбора начальных условий. На рис. 4 приведены решения при различных начальных условиях: слева – при $p_i(0)=0{,}2$; $i=1,\ldots,5$; справа – при $p_1(0)=1$; $p_i(0)=0$; $i=2,\ldots,5$. Вероятности наступления состояний загрязнения воздушной среды достигают значений $p_1=0{,}027$; $p_2=0{,}031$; $p_3=0{,}202$; $p_4=0{,}615$; $p_5=0{,}125$ соответственно для малого, умеренного, высокого, очень высокого и экстремально высокого уровней загрязнения.



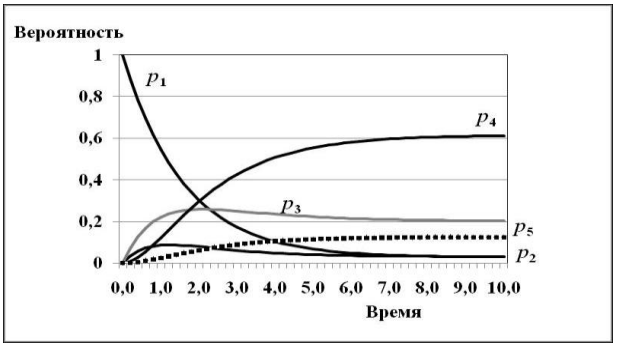


Рис. 4. **Вероятности наступления состояний воздушной среды при различных начальных условиях**

Среднеквадратическая ошибка аппроксимации интенсивностей λ_{ij} составила ε_1=0,01; ε_2=0,03; ε_3=0,1; ε_4=0,24; ε_5=0,12.

Выводы

1. Наиболее вероятным состоянием системы является уровень очень высокого загрязнения атмосферного воздуха. Его вероятность составляет 0,615.
2. Вероятность состояний, характеризующихся малым и умеренным уровнем загрязнения, в рассмотренном примере пренебрежимо малы: p_1=0,027 и p_2=0,031.
3. Время выхода системы на стационарный режим существенно зависит от вида начальных условий.
4. Среднеквадратическая ошибка характеризуется большим разбросом значений от 0,1 до 0,25 и является максимальной для наиболее вероятного состояния.

Литература

1. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Наука, 1991. – 384 с.
2. Государственный доклад «О состоянии и охране окружающей среды в Красноярском крае за 2009 год» : [ежегодный отчет] / М-во природ. ресурсов и лесн. комплекса адм. Красноярского края, Енисейс. упр. Федерал. службы по экол., технол. и атом. надзору, Упр. Федерал. службы по надзору в сфере природопользования по Красноярскому краю. – Красноярск, 2010. - 237 с.
3. Состояние загрязнения атмосферного воздуха города Красноярска [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://meteo.krasnoyarsk.ru/МониторингОС/tabid/227/Default.aspx. - Загл. с экрана.
4. Сверлова, Л.И. Научные основы современного подхода к оценке уровня загрязнения атмосферного воздуха городов [Текст] / Л.И. Сверлова // Успехи современного естествознания. – 2009. – №7. – С. 20-22.
5. Ли, Ц. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам [Текст] / Цунг-Чао Ли, Джордж Г. Джардж, Арнольд Зельнер; пер. с англ. под ред. Н.С. Райбмана. – М.: Статистика, 1977. – 221 с.
6. Адмаев, О.В. Использование марковских процессов для оценки экологической безопасности воздушного пространства города [Текст] / О.В. Адмаев, Т.В. Гавриленко // Оптика атмосферы и океана. – 2010. – Т.23. – №12. – С. 1087-1090.
7. Пригарин, С.М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей [Текст] / С.М. Пригарин. – Новосибирск: ИВМи МГ СО РАН, 2005. – 259 с.